www.convest.unicamp.br

Caderno de Questões 2002

Caderno de Questões 2002

Vestibular nacional

UNICAMP 2003

A Unicamp Comenta Suas provas

UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

2ª Fase

Matemática

UNICAMP

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

banespa

Grupo Santander Banespa

Introdução

A prova de matemática da segunda fase é constituída de 12 questões, geralmente apresentadas em ordem crescente de dificuldade. As primeiras questões procuram avaliar habilidades e conteúdos normalmente presentes nas primeiras séries do Ensino Fundamental, especialmente leitura e compreensão de enunciados , raciocínio lógico e operações elementares. As questões intermediárias estão relacionadas às últimas séries do Ensino Fundamental e envolvem problemas de geometria elementar, aritmética e contagem. As últimas questões pretendem avaliar os conteúdos usuais do Ensino Médio. São propostos problemas mais elaborados e que exigem raciocínios mais sofisticados e o domínio de técnicas e conteúdos específicos. Um bom conhecimento das funções elementares, que são as funções estudadas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e seus gráficos tem sido decisivo para o sucesso dos candidatos na prova de matemática.

ATENÇÃO: Escreva a resolução COMPLETA de cada questão no espaço reservado para a mesma.

Não basta escrever apenas o resultado final: é necessário mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

Questão 1

Caminhando sempre com a mesma velocidade, a partir do marco zero, em uma pista circular, um pedestre chega à marca dos 2.500 metros às 8 horas, e aos 4.000 metros às 8h15min.

a) A que horas e minutos o referido pedestre começou a caminhar?

b) Quantos metros tem a pista se o pedestre deu duas voltas completas em 1 hora e 40 minutos?

Resposta esperada

Entre 2.500 metros e 4.000 metros, o pedestre percorreu 1.500 metros tendo gasto, para isso, 15 minutos. Logo, percorreu 100 metros por minuto.

a) Então, para sair do zero e chegar aos 2.500 metros, o tempo será de 25 minutos. Como chegou aos 2.500 metros às 8 horas, o horário de saída do marco zero foi às 7 horas e 35 minutos.

Resposta: Começou a caminhar às 7 horas e 35 minutos.

(3 pontos)

b) Se foram duas voltas completas em 1 hora e 40 minutos, ou seja, em 100 minutos, cada volta foi percorrida em 50 minutos. Como o pedestre percorre 100 metros por minuto, o comprimento da pista é de 50x100 = 5000 metros.

Resposta: A pista tem 5.000 metros de comprimento.

(2 pontos)

Exemplo acima da média

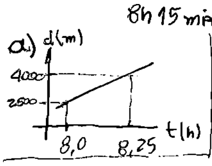
A) O pedestre levou 15 minutos para sair do marco 2500 m e atingir 4000 m. portanto andou 1500 m, assim vemos que o pedestre percorre 100 m em 1 minuto, portanto percorre 2500 m em 25 minutos, logo o pedestre iniciou sua corrida 7 h 35 min.

B) Se o pedestre deu duas voltas em 1 h e 40 min, deu uma volta na metade do tempo: 50 minutos, assim como o pedestre percorre 100 metros em um minuto, percorrerá 5000 metros em 50 minutos; logo a pista de atletismo possui 5000 metros.

Exemplo abaixo da média

8h 15 min = 8,25h

a)



• $m = \dfrac{4000-2500}{8,25-8} \rightarrow m = 6000$

• $y - 2500 = 6000(x-8) \rightarrow y = 6000x - 21500$

• para $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{21500}{6000} \rightarrow x = 3,\cancel{58}\ h$

∴ O pedestre começou a caminhar às 3h e 35 min

b)

Comentários

Trata-se de uma questão simples, relacionada ao cotidiano dos candidatos. A maior incidência de erros foi na conversão de unidades e na interpretação de 8 h 15min como 8,15 horas. Também foram observadas imprecisões no uso de unidades. A porcentagem de notas máximas, nessa questão, foi 80 %.

Questão 2

Em uma empresa, 1/3 dos funcionários tem idade menor que 30 anos, 1/4 tem idade entre 30 e 40 anos e 40 funcionários têm mais de 40 anos.

a) Quantos funcionários tem a referida empresa?

b) Quantos deles têm pelo menos 30 anos?

Resposta esperada

a) Sabe-se que 1/3 dos funcionários têm menos de 30 anos e 1/4 dos funcionários estão entre 30 e 40 anos. Como 1/3+1/4 = 7/12 podemos concluir que 5/12 dos funcionários têm mais de 40 anos. Esses 5/12 equivalem a 40 funcionários; logo 1/12 equivale a 8 funcionários, e portanto, 12/12 que representa o total dos empregados da empresa, equivalem a 12 x 8 = 96 funcionários.

Resposta: A empresa tem um total de 96 funcionários.

(3 pontos)

b) Apenas 1/3 dos funcionários da empresa tem menos de 30 anos, ou seja, 32 funcionários. Portanto, 64 funcionários têm pelo menos 30 anos.

Resposta: São 64 funcionários com pelo menos 30 anos.

(2 pontos)

Exemplo acima da média

(A) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+40=x \to 12x-4x-3x=12.40 \to 5x=12.40$

$x=96$

RESP.: A EMPRESA TEM 96 FUNCIONÁRIOS

(B) $\frac{1}{4}$ de funcionários ENTRE 30 E 40 + 40 funcionários C/ MAIS DE 40

$\frac{1}{4}=24$ FUNC. $24+40=64$

RESP: 64 funcionários TEM PELO MENOS 30 ANOS.

Exemplo abaixo da média

a) $X=\frac{X}{3}+\frac{X}{4}+40$

X = Nº DE FUNCIONÁRIOS

b) $\frac{1}{3}$ TEM PELO MENOS 30 ANOS.

Comentários

Muitos candidatos não conseguiram entender o que significa "ter pelo menos 30 anos". Foi possível notar uma grande variedade de tipos de raciocínio, a maioria deles corretos. Nessa questão, como já havia ocorrido na primeira fase, o costume infeliz de converter frações em decimais complicou as respostas e as notas de muitos candidatos.

Questão 3

Uma sala retangular medindo 3m por 4,25m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. Supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

a) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?

b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

Resposta esperada

a) A sala retangular mede 300 cm por 425 cm. Como os ladrilhos são quadrados e não devem ser cortados, cada lado do retângulo precisa ser divisível pelo comprimento do lado do ladrilho. E como o lado de cada ladrilho deve ter comprimento máximo, segue-se que o comprimento do lado do ladrilho é igual ao mdc (300, 425) = 25.

Resposta: Cada ladrilho deve medir 25 cm por 25 cm.

(3 pontos)

b) Para obter o número de ladrilhos que são necessários basta dividir a área da sala, que é de 300 x 425 = 127.500 cm^2 pela área de cada ladrilho, que é de 25 x 25 = 625 cm^2. Então: 127.500/625 = 204.

Resposta: São necessários 204 ladrilhos.

(2 pontos)

Exemplo acima da média

(a) 300cm 425cm •a medida máxima do lado de cada ladrilho é o MDC entre os lados da sala, assim:

$300 = 2^2.3.5^2$
$425 = 5^2.17$ } MDC(300,425) = 5^2 = 25

R: A medida máxima do lado do ladrilho é 25cm.

(b) 425 : 25 = 17 ladrilhos
300 : 25 = 12 ladrilhos
nº de ladrilhos = 12x17

R: número de ladrilhos = 204.

Exemplo abaixo da média

a) 3 m = 300 cm
4,25 m = 425 cm

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$300 = 2^2.3.5^2$

425	5
85	5
17	17
1	

$425 = 5^2.17$

m.d.c (300, 425) = 25

300 ÷ 25 = 12 (resto 50 → 0)
425 ÷ 25 = 17 (resto 175 → 0)

RESP: A dimensão máxima dos ladrilhos é 12 cm por 17 cm.

b) 300 cm, 425 cm SALA; 12 cm, 17 cm LADRILHO

$\frac{300}{12} = 25$ $\frac{425}{17} = 25$

25 x 25 = $\boxed{625 \text{ ladrilhos}}$

Comentários

Esta questão avalia: conversão de unidades, divisibilidade e áreas. Apareceram algumas conversões absurdas de unidades e erros grosseiros de aritmética elementar.

Questão 4

Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões.

a) Quantos caminhões foram necessários naquele dia?

b) Quantos quilos transportou cada caminhão naquele dia?

Resposta esperada

a) Sejam x e y, respectivamente, o número de caminhões e a carga de um, em toneladas, de modo que: $x.y = 60$.

No dia especial, pelas informações dadas, temos: $(x + 4).(y - 0{,}5) = 60$. Desenvolvendo esta equação e substituindo $x.y = 60$, temos:

$4y - \frac{1}{2}x - 2 = 0$ e substituindo $x = \frac{60}{y}$ chegamos à equação: $2y^2 - y - 15 = 0$, cujas raízes são: $y = 3$ e $y = -\frac{10}{4}$. Como y não pode ser negativo, resta $y=3$ e, portanto, $x=20$.

Resposta: Naquele dia especial foram necessários 24 caminhões.

(4 pontos)

b) Para transportar 60.000 *Kg* em 24 caminhões, cada caminhão terá transportado, naquele dia, 60.000/24 = 2.500 *Kg*.

Resposta: Cada caminhão transportou 2.500 *Kg*.

(1 ponto)

Exemplo acima da média

x = nº de caminhões
y = carga normal

$$\begin{cases} xy = 60\text{ ton} \rightarrow y = \frac{60}{x} \\ (x+4)(y - 500) = 60\text{ ton} \end{cases}$$
0,5 ton

$(x+4)(y-0{,}5)=60$

$\underbrace{xy}_{60} - 0{,}5x + 4y - 2 = 60$

$-0{,}5x + 4y = 2$

$-0{,}5x + 4 \cdot \frac{60}{x} = 2$

$\frac{-0{,}5x^2 + 240}{x} = 2x$

$-0{,}5x^2 - 2x + 240 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 240$

$\rightarrow \Delta = 4 + 480$

$\Delta = 484$

$x = \frac{2 \pm 22}{2(-0{,}5)}$ $\rightarrow x' = \frac{24}{-1} = -24$; $\rightarrow x'' = \frac{-20}{-1} = 20$

60 000 | 12
00 00 | 3000 − 500 = 2500

Resp: foram necessários 24 caminhões e cada um transportou 2500 Kg.
a e b

Exemplo abaixo da média

1 CAMINHÃO —— x · 0,5 T   4C — 1T

(NORMALMENTE) y C —— 60 T

y+4 —— 60T

Comentários

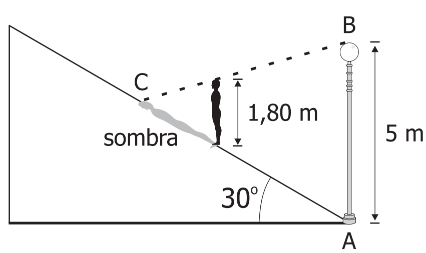
Muitos candidatos, mesmo tendo conseguido equacionar corretamente o problema, erraram – em geral por descuido nas operações algébricas – a resolução das equações e/ou a interpretação dos resultados.

Questão 5

Um homem, de 1,80m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30º, conforme mostra a figura. No ponto A está um poste vertical de 5 metros de altura, com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para:

a) Calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima.

b) Calcular a área do triângulo ABC.



Resposta esperada

a) Seja x o comprimento da sombra. Então:

$$\frac{4+x}{x} = \frac{5}{1{,}8} \quad \text{ou seja} \quad x = 2{,}25$$

Resposta: O comprimento da sombra, naquele momento, é de 2,25 metros.

(3 pontos)

b) A altura h do triângulo ABC, relativamente ao lado AC, é dada por:

$$sin60° = \frac{h}{5} \quad \text{de onde tiramos que} \quad h = 5.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

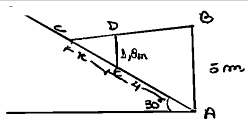
$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 6{,}25 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{31{,}25 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7{,}8125\sqrt{3}m^2$$

Resposta: A área do triângulo ABC é de $7{,}8125\sqrt{3}m^2$

(2 pontos)

Exemplo acima da média

a)



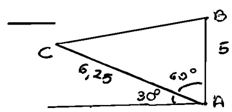
$\triangle ABC \approx \triangle EDC$

$\frac{5}{1{,}8} = \frac{4+x}{x} \Rightarrow 5x = 7{,}2 + 1{,}8x$

$\Rightarrow 3{,}2x = 7{,}2 \Rightarrow x = 2{,}25\,m$

O comprimento da sombra é de 2,25 m.

b)

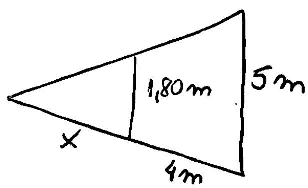


$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6{,}25 \cdot sen\,60°$

$A = \frac{31{,}25 \cdot \sqrt{3}}{4}\ m^2$

Exemplo abaixo da média

a



$\frac{5m}{1{,}8m} = \frac{4m+x}{x}$

$5x = 7{,}2 + 1{,}8x$

$5x - 1{,}8x = 7{,}2$

$x = \frac{7{,}2}{3{,}2}$

$\boxed{x = 22{,}5\,m}$

O comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima, é de 22,5 m.

Comentários

O objetivo dessa questão é avaliar o conceito de semelhança de triângulos e o uso de trigonometria do triângulo retângulo, além de operações aritméticas com radicais. O uso desnecessário de aproximações foi, novamente, bastante comum.

Questão 6

Em Matemática, um número natural a é chamado *palíndromo* se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8, 22 e 373 são palíndromos. Pergunta-se:

a) Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9.999?

b) Escolhendo-se ao acaso um número natural entre 1 e 9.999, qual é a probabilidade de que esse número seja palíndromo? Tal probabilidade é maior ou menor que 2%? Justifique sua resposta.

Resposta esperada

a) De 1 a 9 todos são palíndromos. De 10 a 99 são palíndromos apenas os números formados por 2 algarismos iguais, que são em número de 9. Entre 100 e 999, podemos escolher qualquer dígito de 1 a 9 para ser o primeiro algarismo, o que também determina o último algarismo e podemos escolher qualquer dígito de 0 a 9 para ser o segundo algarismo. Logo, temos 9 x 10 = 90 desses números. Entre 1.000 e 9.999, podemos escolher os 9 dígitos de 1 a 9 para ser o primeiro e o quarto algarismo e os 10 dígitos de 0 a 9 para ser o segundo e o terceiro dígitos. Logo, teremos também 9 x 10 = 90 desses números sendo palíndromos. Total: 9 + 9 + 90 + 90 = 198 números palíndromos entre 1 e 9.999.

Resposta: Entre 1 e 9.999 existem 198 números palíndromos.

(3 pontos)

Resposta esperada

b) $p = \frac{198}{9999} = \frac{22}{1111} = \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = 2\%$

Resposta: A probabilidade é de $\frac{2}{101}$ que é menor que 2%

(2 pontos)

Exemplo acima da média

a)

(9) → 9 +
(9) (1) → 9 +
(9) (10) (1) → 90 +
(9) (10) (1) (1) → 90

→ 198 palíndromos

b) $P = \frac{CF}{CP}$ → $P = \frac{198}{9.9.99} \cong 1{,}99\%$

Tal probabilidade é menor que 2% pois se utilizarmos o seguinte artifício: $\frac{(198+1)}{(9999+1)}$ chegaremos ao resultado aproximado da primeira fração $= \frac{199}{10000}$

Exemplo abaixo da média

a) Infinitos

b) A probabilidade de ser palíndromo é $\frac{\infty}{9999}$ é maior que 2%, pois trata-se de um número enorme dividido por outro consideravelmente grande.

Comentários

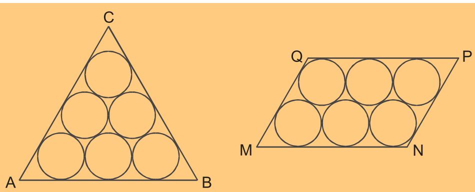
Esta questão apresenta um problema típico de "compreensão e contagem" e inclui o conhecimento da noção básica de probabilidade, de porcentagem e comparação. Uma dificuldade para os candidatos foi interpretar a expressão "entre 1 e 9.999"; a maioria considerou o intervalo fechado, como esperávamos, mas nem todos. Ambas as interpretações foram aceitas.

Questão 7

Seis círculos, todos de raio 1cm, são dispostos no plano conforme mostram as figuras ao lado:

a) Calcule a área do triângulo ABC.

b) Calcule a área do paralelogramo MNPQ e compare-a com a área do triângulo ABC.



Resposta esperada

a) De acordo com a figura, temos:

$$\tan 30° = \frac{1}{x} \quad \text{portanto:} \quad x = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

De modo que o comprimento do lado do triângulo ABC é $L = 4 + 2\sqrt{3}$ e sua altura pode ser calculada assim:

$$h^2 = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 \quad \text{e portanto:} \quad h = \left(2 + \sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$$

A área do triângulo ABC é, então, dada por:

$$A_T = \frac{\left(4 + 2\sqrt{3}\right)\left(3 + 2\sqrt{3}\right)}{2} = 12 + 7\sqrt{3}\,cm^2$$

Resposta: A área A_T do triângulo ABC é de $12 + 7 \cdot \sqrt{3}\,cm^2$

(2 pontos)

Resposta esperada

b) $tan60^\circ = \frac{1}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ e, portanto $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Então:

$l = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{4\sqrt{3}+6}{3}$ e como $sin\,60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos $h = 2 + \sqrt{3}$

$$A_P = \left(4 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 12 + \frac{20}{3}\sqrt{3}cm^2$$

Resposta: $A_P = 12 + \frac{20}{3}\sqrt{3}cm^2$ e $A_T > A_P$ pois $7 > \frac{20}{3}$

(3 pontos)

Exemplo acima da média

ⓐ A área do triângulo ABC é dado por, sendo um triângulo equilátero : $S = \frac{l^2}{2} \cdot sen60^\circ$. Como o lado pode ser calculado da seguinte forma: $1+1+1+1+2.\left(\frac{1}{tg30^\circ}\right)$, logo o lado l mede $4+2\sqrt{3}$

Portanto $S = 12 + 7\sqrt{3}$ cm.

ⓑ A área do paralelogramo MNPQ é dada por: $S' = b.h$.

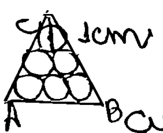
Da simetria da figura, sabe-se que os angulos $\hat{P}$ e $\hat{M}$ são de 60° e os ângulos Q e N são de 120°, logo:

$h = 1+1+\sqrt{3}$

$b = 1+1+1+1+\frac{1}{tg30^\circ}+tg30^\circ \Leftrightarrow S' = \left(\frac{12+4\sqrt{3}}{3}\right).\left(2+\sqrt{3}\right) = 12 + \frac{20}{3}\sqrt{3}$

Logo a area do triângulo é maior que a área do paralelogramo em $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exemplo abaixo da média

a) 

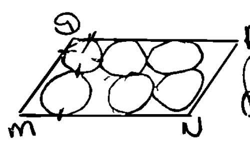
$C_{circ} = 2\pi R$

$\therefore C_{circ} = 2\pi cm$

Como cada lado equilave a 1 circunferência, então cada lado mede 3π cm.

Como o triângulo é equilátero sua área vale $\frac{l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{9\pi^2\sqrt{3}}{2}$

R: A área do triângulo ABC vale $\frac{9\pi^2\sqrt{3}}{2}$.

b) 

Como cada lado $(\overline{QM}$ e $\overline{PN})$ mede 1 circunferência, então 4π cm é os lados $(\overline{MN}$ e $\overline{QP})$ medem

Comentários

Esta questão requer, para sua resolução, conhecimentos de geometria e trigonometria. Além disso, o desenvolvimento algébrico envolvendo radicais, exige muito cuidado. Foi considerada uma questão difícil e, conseqüentemente, as notas foram baixas com um grande número de zeros. Muitos candidatos insistem em aproximar raízes quadradas por números decimais, dificultando as operações e, principalmente, a comparação de resultados próximos.

Questão 8

Uma piscina, cuja capacidade é de $120m^3$, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t)^2$ para $0 \leq t \leq 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geq 20$.

a) Calcule as constantes a e b.

b) Faça o gráfico da função $V(t)$ para $t \in [0,30]$

Resposta esperada

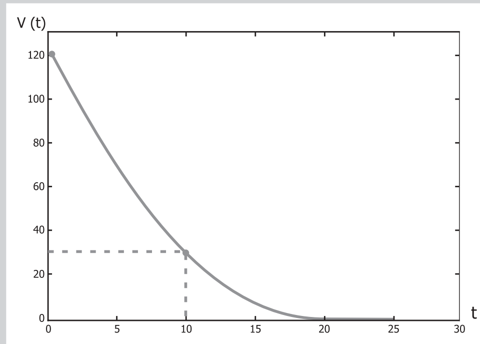
a) Temos que $a \neq 0$ pois, caso contrário, $V(t) = 0$ para todo t. Para $t = 20$, sabe-se que $V(20) = a.(b - 20)^2 = 0$ ou seja $b = 20$. Para $t = 0$, temos: $V(0) = a.(20 - 0)^2 = 400a = 120$. Logo:

$$a = \frac{120}{400} = 0{,}3$$. Então: $V(t) = 0{,}3\,(20 - t)^2$

Resposta: $a = 0{,}3$ e $b = 20$ de modo que $V(t) = 0{,}3\,(20-t)^2$

(2 pontos)

b) Para fazer o gráfico de $V(t)$ observemos que se trata de uma função quadrática, portanto o seu gráfico é uma parábola. Como $a = 0{,}3 > 0$, o gráfico é voltado para cima, como $y = x^2$. Sabemos também que os pontos (0,120), (10,30) e (20,0) pertencem ao gráfico de $V(t)$ e que $V(t) = 0$ para $20 \leq t \leq 30$.



(3 pontos)

Exemplo acima da média

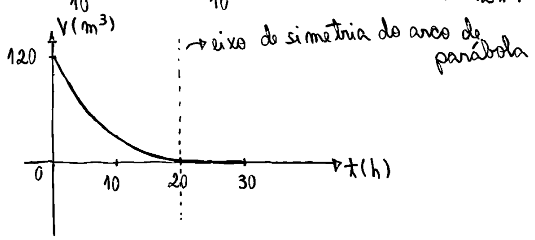
a) $t=0 \Rightarrow V(0) = a.(b-0)^2 = a.b^2 = 120 \quad (I)$

$t=20 \Rightarrow V(20) = a.(b-20)^2 = \cancel{a}\ 0 \quad (II)$

$a.b^2 = 120 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a.(b-20)^2 = 0 \Rightarrow (b-20)^2 = 0 \Rightarrow b-20 = 0 \Rightarrow b = 20$

$b=20$ em (I) : $a.(20)^2 = 120 \Rightarrow 400a = 120 \Rightarrow a = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$

b) $V(t) = \frac{3}{10}(20-t)^2 = \frac{3}{10}(400 - 40t + t^2) = 120 - 12t + 0{,}3t^2$



Exemplo abaixo da média

a) INÍCIO $\rightarrow V = 120\,m^3 \rightarrow T = 0 \Rightarrow 120 = a.b^2$

FINAL $\rightarrow V = 0 \rightarrow T = 20h \Rightarrow 0 = a(b-20)^2$

$a(b^2 - 40b + 400) = 0$

$ab^2 - 40ab + 400a = 0$

$120.10^3 - 40a\sqrt{\frac{120.10^3}{a}} + 400a = 0$

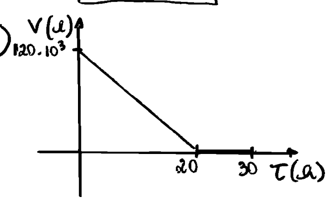
Resolvendo: $\boxed{a = 150}$

$\rightarrow 120.10^3 = a.b^2$

$120.10^3 = 150.\ b^2$

$\boxed{b = 20\sqrt{2}}$

b)



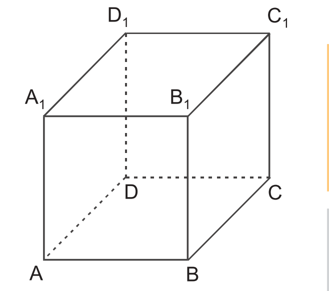
Comentários

Aqui temos um problema do cotidiano que é modelado por uma função bem conhecida – a função quadrática. Os parâmetros, que são as constantes a e b, devem ser calculados a partir das informações dadas no texto. Com relação ao gráfico pedido, o detalhe está na exigência de limitar o domínio ao intervalo [0 , 30] e o candidato deveria deixar claro que no intervalo [20 , 30] tem-se V(t) = 0.

O sólido da figura ao lado é um cubo cuja aresta mede 2cm.

a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.

b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.



Resposta esperada

a) $Vol\,(ABCD_1) = \frac{1}{3}(\text{área } ABC).\overline{DD_1} = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2 = \frac{4}{3}cm^3$

Resposta: O volume da pirâmide *$ABCD_1$* é de 4/3 cm^3.

(2 pontos)

b) A área do triângulo $BCD_1 = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2}{2} = 2\sqrt{2}$, pois $\overline{CD_1} = 2\sqrt{2}$

Então: $Vol\,(ABCD_1) = \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}.d$ o que implica $d = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Resposta: A distância de *A* ao plano que passa por *B*, *C* e *D_1* é de $\sqrt{2}$ cm.

(3 pontos)

Exemplo acima da média

ⓐ $V = A_B \cdot H \cdot \frac{1}{3}$

$V = \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3}$; a é aresta

$V = \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{3}\ cm^3}$

Resposta: O volume é $\boxed{\frac{4}{3}\ cm^3}$

ⓑ • BD_1: $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

BC: $a = 2$

D_1C: $a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

∴ como $D_1\hat{C}B = 90°$ ∴ $BD_1C = \alpha$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $A_{\Delta B.CD_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A_{\Delta BCD_1} = 2\sqrt{2}}$

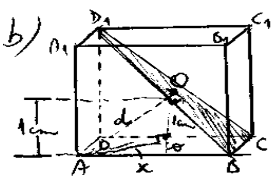
Como o volume da pirâmide é constante, e a altura é a distância de A até o plano D_1, C, B, tem-se

$\frac{4}{3} = \frac{1}{3}\, 2\sqrt{2} \cdot d \Rightarrow d = \sqrt{2}$ cm Resposta: A distância de A até o tal plano é $\boxed{\sqrt{2}\ cm}$

Exemplo abaixo da média

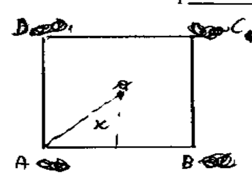
a) $V_{ABCD_1} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot l \cdot l \cdot l = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{\frac{8}{3}\ cm^3}$

b)



~~[illegible]~~ (~~[illegible]~~): Na base ABCD

$\Rightarrow$

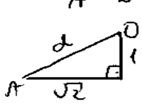


$x = \frac{\text{diagonal}}{2}$

$x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm

Do , onde $\overline{AO}$ é a distância do ponto A ao plano pelos pontos B, C e D_1:



$d^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{3}\ cm}$

Resp: a) 8/3 cm^3

b) $\sqrt{3}$ cm

Comentários

Aqui está um problema clássico de geometria no espaço, envolvendo o cálculo de áreas, volumes e distância de um ponto a um plano. Mesmo os candidatos que conhecem as fórmulas usuais da geometria tiveram dificuldade no item **b** provavelmente por não saber que a distância de um ponto a um plano é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano.

α

Questão 10

Considere o sistema linear abaixo, no qual *a* é um parâmetro real:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{cases}$$

a) Mostre que para *a* = 1 o sistema é impossível.

b) Encontre os valores do parâmetro *a* para os quais o sistema tem solução única

Resposta esperada

a) Para *a* = 1 o sistema dado se reduz a:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

É claro que se $x + y + z = 1$ então $x + y + z \neq 2$. Logo, para $a = 1$, o sistema é impossível.

Resposta: Para *a* = 1 o sistema é impossível.

(1 ponto)

b) Um S.L. 3x3 tem solução única se, e somente se, o determinante da matriz A dos coeficientes for diferente de zero, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Então det(*A*) = $a\,(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = (a - 1)\,[a\,(a+1) - 2] = a^2 + a - 2$.

Como $a^2 + a - 2 = 0 \leftrightarrow a = 1$ ou $a = -2$, temos:

Resposta: O S.L. tem solução única para a ≠ 1 e a ≠ –2.

(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) Para $a = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

Desse sistema concluímos que uma soma $(x + y + z)$ não pode admitir 3 valores diferentes $(1, 2, -3)$, portanto o sistema é impossível.

b) Para o sistema ter solução única é preciso que o determinante seja igual a zero.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$a^3 + 1 + 1 - a - a - a = 0$

$a^3 + 2 - 3a = 0$

$(a-1) \cdot (a^2 - 2 + a) = 0$

$a - 1 = 0$

$\boxed{a = 1}$

$a^2 + a - 2 = 0$

$S = -1$, $P = -2$ $\left\{ \begin{matrix} \boxed{a_1 = 1} \\ \boxed{a_2 = -2} \end{matrix} \right.$

R: Para que o sistema admita uma única solução a pode ser 1 ou −2.

Exemplo abaixo da média

a) sendo $a = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=-3 \end{array}\right\}$$ é impossível pois $1 \neq 2 \neq -3 \neq 1$

b) $ax + y + z = 1$

$x + ay + z = 2$

$+\; x + y + az = -3$

$2x + ax + 2y + ay + 2z + az = 0$

$2\cancel{(x+y+z)} + a\cancel{(x+y+z)} = 0$

$2 = -a$

$\boxed{a = -2}$

O sistema tem solução única quando $a = -2$

Comentários

Muitos candidatos usaram resultados sobre sistemas lineares que são incompletos ou mesmo errados mas que aparecem freqüentemente em livros didáticos para o ensino Médio. O uso do processo de escalonamento de matrizes para a resolução de sistemas também trouxe dificuldades para candidatos e corretores. Aos Professores de Matemática do Ensino Médio recomendamos consultar o volume 47 e outros da Revista do Professor de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, onde está feita uma análise cuidadosa a respeito da resolução de sistemas lineares.

Questão 11

Considere a equação $2^x + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, onde m é um número real.

a) Resolva essa equação para $m = 1$.

b) Encontre todos os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real.

Resposta esperada

a) A equação dada $2^x + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$ pode ser escrita como $2^{2x} + 4m - (2m+2).2^x = 0$. Para $m = 1$ ela se reduz a $2^{2x} - 4.2^x + 4 = 0$. Fazendo $y = 2^x$, temos: $y^2 - 4y + 4 = 0$ ou seja: $(y-2)^2 = 0$ cuja única raiz é $y = 2$. Como $y = 2^x$ temos $x = 1$.

Resposta: A única raiz da equação dada, para $m = 1$ é $x = 1$.

(1 ponto)

b) Vamos encontrar as raízes da equação: $y^2 - (2m + 2)\, y + 4m = 0$, usando Bháskara:

$$y = \frac{(2m+2) \pm \sqrt{(2m+2)^2 - 16m}}{2} = \frac{(2m+2) + \sqrt{(2m-2)^2}}{2} = (m+1) \pm |m-1|$$

Se $m = 1$ então $y = m + 1$ e, portanto, $x = 1$

Se $m > 1$ então $y = (m + 1) \pm m - 1$ ou seja $y_1 = m + 1 + m - 1 = 2m$ e $y_2 = m + 1 - (m - 1) = 2$.

Como $m > 1, 2m > 2$ e, portanto, $y_1 \neq y_2$ e, como são ambos positivos, $x_1 \neq x_2$.

Então, no caso $m > 1$, teremos duas raízes reais distintas.

Se $m - 1 < 0$ então $y = (m + 1) \pm (1 - m)$ ou seja $y_1 = m + 1 + 1 - m = 2$ e $y_2 = m + 1 - 1 + m = 2m$.

Logo, se $m \leq 0$ então teremos apenas uma raiz positiva ($y_1 = 2$) e a correspondente $x_1 = 1$.

Resposta: Os valores de m para os quais a equação dada tem apenas uma raiz real são $m = 1$ e $m \leq 0$.

(4 pontos)

Exemplo acima da média

$\boxed{a}$ $2^x + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$ $m=1$

$2^x + 2^{2-x} - 4 = 0$

$2^x + \frac{2^2}{2^x} - 4 = 0$ $2^x = y$

$2^{2x} + 2^2 - 4 \cdot 2^x = 0$

$y^2 + 4 - 4y = 0$

$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0$

$y = 2$

$2^x = 2$

$x = 1$

$S = \{1\}$

2^x não pode ser negativo. Quando m é negativo, uma das soluções da eq do 2º grau será negativa, e não servirá. Assim, só terá a equação uma solução.

$m=0$

$2^x - 2 = 0$

$x = 1$

$\boxed{b}$ $2^x + \frac{m \cdot 4}{2^x} - 2m - 2 = 0$

$2^{2x} + 2^x(-2m-2) + 4m = 0$

$y^2 + y(-2m-2) + 4m = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$ única raiz real $\Rightarrow \Delta = 0$

$\Delta = 4m^2 + 8m + 4 - 16m$

$\Delta = 4m^2 - 8m + 4 = 0$

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1) = 0$

$m = 1$

A equação tem única raiz real apenas para m = 1, m = 0 e m negativo $(m<1)$

Exemplo abaixo da média

a) $2^x + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$

para $m=1$

$2^x + 2^{2-x} - 2 - 2 = 0$

$2^x + 2^{2-x} = 4$ $x + 2 - x = 2$

$2^x + 2^{2-x} = 2^2$

$\boxed{x = 1}$

b) PARA $\boxed{m=0}$

testando:

$2^x - 2 = 0$

$\Rightarrow \{ x = 1$ (1 raiz)

Comentários

Esta questão, que não é fácil, exigiu do candidato um bom conhecimento da função exponencial e da função quadrática. Mesmo apresentando um resultado muito abaixo do esperado, evidenciado pela grande porcentagem de zeros, a questão foi importante para identificar e selecionar os candidatos que estavam realmente bem preparados.

Questão 12

Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo.

a) Mostre que as tangentes desses três ângulos não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.

b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam **números inteiros positivos**, calcule essas tangentes.

Resposta esperada

Suponhamos que $0 < \alpha \le \beta \le \gamma < 180°$.

a) Se $\tan \alpha \ge 2 \rightarrow \alpha > 60°$. E isto não pode ocorrer nos três ângulos de um triângulo.
Resposta: Pelo menos um dos três ângulos deve ter tangente < 2.
(1 ponto)

b) Seja α tal que $0 < \tan \alpha < 2$. Como $\tan \alpha$ é, por hipótese, um número inteiro, segue-se que $\tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45°$. Como as tangentes de β e γ são números inteiros positivos, tais ângulos não podem ser retos.
Logo, $\beta + \gamma = 135° \rightarrow \tan(\beta+\gamma) = -1$. Usando a fórmula da tangente da soma, temos: $\frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\ \tan\gamma} = -1$
e, portanto, $\tan \beta + \tan \gamma = \tan \beta \tan \gamma - 1$.
Fazendo $x = \tan \beta \ne 1$ e $y = \tan \gamma$ chegamos à equação $x + y = xy - 1$ (*)
Devemos buscar as soluções inteiras positivas dessa equação:

$x + 1 = xy - y = y(x-1)$ ou seja $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Para que y seja inteiro, $x - 1$ deve ser um

Resposta esperada

dos divisores de 2, a saber:

(1) $x - 1 = -2 \rightarrow y = 0$
(2) $x - 1 = -1 \rightarrow y = -1$
(3) $x - 1 = 1 \rightarrow y = 3$
(4) $x - 1 = 2 \rightarrow y = 2$

Logo as soluções inteiras positivas da equação (*) são (2,3) e (3,2).
Resposta: tan α = 1; tan β = 2 e tan γ = 3

(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) Temos que $tg\,60° = \sqrt{3} < 2$.
~~Se $tg\,\alpha \geq 2$, então $\alpha < 90°$, pois $\alpha > 90° \Rightarrow tg\,\alpha < 0$.~~
Se $0 \leq \alpha < 180$ e $tg\,\alpha > 2$, então $\alpha < 90°$; pois $180° > \alpha > 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\,\alpha < 0$. E $\alpha > 60°$, pois a função tangente é crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo $tg\,\alpha > tg\,60° \Rightarrow \alpha > 60°$.

Mas se para os 3 ângulos vale $tg\,\alpha > 2$ e todos são menores que 180°, pois estão no triângulo, então todos α, β, γ são maiores que $60° \Rightarrow \alpha > 60°, \beta > 60°, \gamma > 60° \Rightarrow \gamma + \beta + \alpha > 180°$; Absurdo, pois $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (ângulos internos de um triângulo), logo é impossível a hipótese.

b) Temos $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta - \gamma$.
$tg\,\alpha = tg(180° - \gamma - \beta) = -tg(\gamma + \beta) = -\frac{(tg\,\gamma + tg\,\beta)}{1 - tg\,\gamma\, tg\,\beta} = \frac{-(tg\,\gamma + tg\,\beta)}{1 - tg\,\gamma\, tg\,\beta}$.
Não podem ser todas tangentes maiores ou iguais a 2, logo pelo menos uma é menor, e só pode valer 1, pois é inteiro positivo. Sem perda de generalidade seja $tg\,\gamma = 1$. Logo $tg\,\alpha = -\frac{(1 + tg\,\beta)}{1 - 1 \cdot tg\,\beta} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{tg\,\beta + 1}{tg\,\beta - 1} \Rightarrow tg\,\alpha = 1 + \frac{2}{tg\,\beta - 1}$.
Como $tg\,\alpha$ é inteiro positivo, $tg\,\beta - 1$ divide 2, logo $tg\,\beta - 1 = 1$ ou $tg\,\beta - 1 = 2$.
Assim ou $tg\,\beta = 2$ e $tg\,\alpha = 3$ ou $tg\,\alpha = 3$ e $tg\,\beta = 2$.
De qualquer forma as tangentes valerão 1, 2 e 3.

Exemplo abaixo da média

a) Os ângulos internos de um triângulo ~~vão~~ se encontram nos 1º e 2º quadrantes do círculo trigonométrico (entre 0° e 180°). Somente ângulos situados no 3º quadrante é que podem possuir tangentes maior ou igual a 2.

b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam números inteiros e positivos, só poderíamos ter um triângulo retângulo isósceles, no qual, 2 tangentes teriam o mesmo valor 1 (45°) e a outra não existiria (90°)

Comentários

Esta foi, sem dúvida, a questão mais difícil da prova. Além de um bom domínio da trigonometria, ela envolve raciocínios cuidadosos e habilidade para a resolução de equações com soluções inteiras.